ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.12 1980

В. А. Тихонов

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛАПЛАСА ОРТОГОНАЛЬНЫХ СТУПЕНЧАТО-ЧЕБЫШЕВСКИХ СОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ

В работе [3] на многомерных поверхностях аффинного пространства автором рассмотрен класс сетей, названных ступенчато-чебышевскими. В настоящем сообщении изучается геометрия ортогональных ступенчато-чебышевских сопряженных систем в евклидовом пространстве.

1. Пусть тангенциально невырожденная гиперповерхность V_n в евклидовом пространстве E_{n+1} есть ортогональная n-сопряженная система относительно ориентированной ступенчато-чебышевской сети Σ_n. Присоединим к гиперповерхности V_n подвижной ортонормированный репер $\{x, \vec{e}_i, \vec{e}_{n+1}\}$ $(i,k,j=\overline{1,n})$, где $\vec{e}_i$ – орты касательных к линиям сети в точке x, а вектор $\vec{e}_{n+1}$ – орт нормали к гиперповерхности V_n в точке x. Инфинитезимальные перемещения выбранного таким образом репера определяются уравнениями :

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^{n+1} \vec{e}_{n+1}, \quad d\vec{e}_{n+1} = \omega_{n+1}^i \vec{e}_i,$$

причем $\omega^{n+1} = 0, \quad \omega_i^{n+1} = b_{ii}\omega^i, \quad b_{11} b_{22} \ldots b_{nn} \neq 0,$

$$\omega_k^i = a_{ki}^i \omega^i \ (i<k), \quad \omega_j^i + \omega_i^j = 0, \quad \omega_i^{n+1} + \omega_{n+1}^i = 0.$$

2. При доказательстве существования ортогональной ступенчато-чебышевской n-сопряженной системы $\Sigma_n \subset V_n$ исследованию на инволютивность подлежат следующие квадратичные уравнения :

$$\Delta a_{ki}^i \wedge \omega^i = 0 \ (i<k), \quad \Delta b_{ii} \wedge \omega^i = 0,$$

где, например, $\Delta b_{ii} = db_{ii} + \sum_{j>i} a_{ji}^i (b_{ii} - b_{jj})\omega^j$.

Система квадратичных уравнений – в инволюции, так как для нее $q = N = Q = s_1 = C_{n+1}^2, \ s_2 = s_3 = \ldots = s_n = 0$.

Т е о р е м а. Ортогональные ступенчато-чебышевские системы $\Sigma_n \subset V_n \subset E_{n+1}$ существуют с произволом C_{n+1}^2 функций одного аргумента.

Обозначим $\Theta_m = \Theta_m(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m)$ – m-распределение на гиперповерхности V_n, порождаемое векторными полями $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m$, а через $\Theta_{n-m} = \Theta_{n-m}(\vec{e}_{m+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ – ортогонально-дополнительное к нему $(n-m)$-распределение. Каждая из поверхностей V_{n-m}, определяемая голономным распределением Θ_{n-m}, задается системой дифференциальных уравнений $\omega^{n+1} = 0$, $\omega^{i_m} = 0$ и имеет следующие асимптотические формы

$$\Phi^{i_m} = 0, \quad \Phi^{n+1} = \sum_{\alpha_m} b_{\alpha_m \alpha_m} (\omega^{\alpha_m})^2; \quad i_m = \overline{1,m}; \quad \alpha_m = \overline{m+1,n},$$

причем квадратичная форма Φ^{n+1} не является квадратом линейной формы. Согласно теореме Сегре справедлива

Т е о р е м а. Если гиперповерхность V_n – ортогональная n-сопряженная система относительно ступенчато-чебышевской сети Σ_n, то в направлении каждого поля $\Theta_m(x)$ она расслаивается на m-параметрическое семейство поверхностей V_{n-m} коразмерности 1.

При смещении точки x вдоль линий i-го семейства сети Σ_n прямые $[x, \vec{e}_k]$ $(k>i)$ описывают двумерные цилиндрические поверхности.

Сеть $\Sigma_n \subset V_n$ не может быть геодезической, иначе гиперповерхность V_n тангенциально вырождается. n-е семейство линий ортогональной ступенчато-чебышевской n-сопряженной системы является геодезическим на гиперповерхности V_n, а k-е $(2 \le k \le n-1)$ семейство линий – геодезическим на распределении Θ_k.

3. На каждой из касательных $[x, \vec{e}_\kappa]$ ортогональной ступенчато-чебышевской n-сопряженной системы $\Sigma_n \subset V_n$ существуют $\kappa-1$ псевдофокусов (они будут и фокусами $F_\kappa^i\ (i<\kappa)$. При движении точки x по гиперповерхности V_n, точка F_κ^i описывает поверхность (F_κ^i), которую называют [2] преобразованием Лапласа вдоль κ-го семейства линий сети Σ_n. При движении точки x по гиперповерхности V_n, несущей ортогональную ступенчато-чебышевскую n-сопряженную систему Σ_n, получим C_n^2 поверхностей (F_κ^i). Когда точка x описывает сеть $\Sigma_n \subset V_n$ точка F_κ^i опишет на поверхности (F_κ^i) сеть $\Sigma_n(F_\kappa^i)$.

Рассмотрим преобразование Лапласа ортогональной ступенчато-чебышевской 3-сопряженной системы в четырехмерном евклидовом пространстве E_4. Мы будем предполагать каждую из поверхностей (F_κ^i) трехмерной, то есть опускаем изучение вырождения преобразований Лапласа гиперповерхности V_3 в многообразия меньшей размерности.

4. Ортогональная ступенчато-чебышевская 3-сопряженная система $\Sigma_3 \subset V_3$ в евклидовом пространстве E_4 определена дифференциальными уравнениями

$$\omega^4=0,\quad \omega_2^1=a_{21}^1\omega^1,\quad \omega_3^1=a_{31}^1\omega^1,\quad \omega_3^2=a_{32}^2\omega^2;$$
$$\omega_1^4=b_{11}\omega^1,\quad \omega_2^4=b_{22}\omega^2,\quad \omega_3^4=b_{33}\omega^3$$

и их продолжениями

$$\Delta a_{21}^1\wedge\omega^1=0,\ \Delta a_{31}^1\wedge\omega^1=0,\ \Delta a_{32}^2\wedge\omega^2=0,\ \Delta b_{11}\wedge\omega^1=0,\ \Delta b_{22}\wedge\omega^2=0,\ \Delta b_{33}\wedge\omega^3=0.$$

Раскрывая квадратичные уравнения по лемме Картана, имеем:

$$da_{21}^1+[(a_{21}^1)^2+a_{32}^2a_{31}^1+b_{11}b_{22}]\omega^2+a_{21}^1a_{31}^1\omega^3=\alpha\omega^1,$$
$$da_{31}^1+[(a_{31}^1)^2+b_{11}b_{33}]\omega^3+a_{21}^1(a_{31}^1-a_{32}^2)\omega^2=\beta\omega^1,$$
$$da_{32}^2+[(a_{32}^2)^2+b_{22}b_{33}]\omega^3=\gamma\omega^2,$$
$$db_{11}+a_{21}^1(b_{11}-b_{22})\omega^2+a_{31}^1(b_{11}-b_{33})\omega^3=b_{111}\omega^1,$$

$$db_{22}+a_{32}^2(b_{22}-b_{33})\omega^3=b_{222}\omega^2,\quad db_{33}=b_{333}\omega^3.$$

При произвольном смещении точки x по гиперповерхности V_3, положим :

$$d\vec{F}_2^1=\omega^i\vec{m}_i^*,\ d\vec{F}_3^1=\omega^i\vec{q}_i^*,\ d\vec{F}_3^2=\omega^i\vec{\tau}_i^*\ (i,\kappa,j=1,2,3).$$

Векторы, на которые натянуты касательные плоскости к преобразованиям Лапласа (F_2^1), (F_3^1), (F_3^2) в точках F_2^1, F_3^1, F_3^2 соответственно, с точностью до скалярного множителя имеют вид

$$\vec{m}_1=\vec{e}_2,\ \vec{m}_2=-(b_{11}b_{22}+a_{31}^1a_{32}^2)\vec{e}_2+a_{32}^2a_{21}^1\vec{e}_3-b_{22}a_{21}^1\vec{e}_4,$$
$$\vec{m}_3=a_{31}^1\vec{e}_2-a_{21}^1\vec{e}_3,$$
$$\vec{q}_1=\vec{e}_3,\ \vec{q}_2=a_{31}^1\vec{e}_2-a_{21}^1\vec{e}_3,\ \vec{q}_3=b_{11}\vec{e}_3+a_{31}^1\vec{e}_4,$$
$$\vec{\tau}_1=\vec{e}_1,\ \vec{\tau}_2=\vec{e}_3,\ \vec{\tau}_3=b_{22}\vec{e}_3+a_{32}^2\vec{e}_4.$$

Касательные плоскости гиперповерхностей (F_2^1) и (F_3^1) параллельны в точках F_2^1 и F_3^1, следовательно, эти гиперповерхности находятся в классическом соответствии Петерсона.

Изучим каждое из преобразований Лапласа (F_2^1), (F_3^1), (F_3^2) отдельно.

5. Отнесем гиперповерхность (F_2^1) к подвижному реперу $\mathcal{R}'=\{F_2^1, \vec{m}_i, \vec{m}_4\}$, в котором вектор $\vec{m}_4$ орт нормали гиперповерхности (F_2^1). Нетрудно подсчитать, что $\vec{m}_4=\vec{e}_1$. При инфинитезимальном перемещении репера $\mathcal{R}'$ вдоль гиперповерхности (F_2^1) получим :

$$d\vec{F}_2^1=\hat{\omega}^i\vec{m}_i,\ d\vec{m}_i=\Omega_i^j\vec{m}_j+\Omega_i^4\vec{m}_4,\ d\vec{m}_4=\Omega_4^i\vec{m}_i+\Omega_4^4\vec{m}_4.$$

Векторы $\vec{m}_i$ расположены на касательных к линиям сети $\Sigma_3(F_2^1)\subset(F_2^1)$, следовательно, формы $\Omega_i^j\ (i\neq j)$ – главные . Непосредственным вычислением убеждаемся, что :

$$\Omega_2^1=\left(\frac{\alpha a_{32}^2a_{31}^1}{a_{21}^1}+\frac{\alpha b_{11}b_{22}}{a_{21}^1}-b_{22}b_{111}-a_{32}^2\beta\right)\omega^1;\ \Omega_1^2=-\frac{1}{a_{21}^1}\omega^2,$$

$$\Omega^3_1 = 0,\ \Omega^1_3 = \Big(\beta - \alpha\frac{a^1_{31}}{a^1_{21}}\Big)\omega^1,$$

$$\Omega^2_3 = -\frac{a^1_{31}}{a^1_{21}}\omega^2 + \frac{b_{33}}{b_{22}}\omega^3,\ \Omega^3_2 = \Big(\frac{b_{222}a^2_{32}}{b_{22}} - \gamma\Big)\omega^2,$$

а также $\Omega^4_1 = a^1_{21}\omega^1,\ \Omega^4_2 = 0,\ \Omega^4_3 = 0$

Первое семейство линий сети $\Sigma_3(F^1_2)$ – геодезическое, второе и третье семейства линий – асимптотические на гиперповерхности (F^1_2). Гиперповерхность (F^1_2) – тангенциально вырожденная поверхность ранга 1. Каждое из 1-направлений, принадлежащих 2-распределению $\theta^*_2 = \theta^*_2(\vec m_2, \vec m_3)$, является направлением кривизны относительно нормали $[F^1_2, \vec m_4]$ гиперповерхности (F^1_2). Асимптотические семейства линий сети $\Sigma_3(F^1_2)$ – плоские, линии этих семейств лежат в плоскостях $[F^1_2, \vec m_2, \vec m_3]$. Вдоль геодезического семейства линий сети $\Sigma_3(F^1_2)$ гиперповерхность (F^1_2) расслаивается на однопараметрическое семейство плоских двумерных образующих $[F^1_2, \vec m_2, \vec m_3]$. Сеть $\Sigma_3(F^1_2) \subset (F^1_2)$ не может быть ортогональной и имеет на своих касательных 4 фокуса.

6. Присоединим к гиперповерхности (F^1_3) подвижной репер $\mathcal{R}'' = \{F_3, \vec g_i, \vec g_4\}$, где вектор $\vec g_4 = \vec e_1$ – орт нормали гиперповерхности (F^1_3). При инфинитезимальном перемещении точки F^1_3 вдоль гиперповерхности (F^1_3) имеем:

$$d\vec F^1_3 = \omega^i \vec g_i,\ d\vec g_i = \overline{\Omega}^j_i \vec g_j + \overline{\Omega}^4_i \vec g_4,\quad d\vec g_4 = \overline{\Omega}^i_4 \vec g_i + \overline{\Omega}^4_4 \vec g_4.$$

Векторы $\vec g_i$ лежат на касательных к линиям сети $\Sigma_3(F^1_3) \subset (F^1_3)$, и значит, формы $\overline{\Omega}^j_i\ (j \neq i)$ – главные. Вычисления приводят к следующим результатам:

$$\overline{\Omega}^1_2 = \frac{a^1_{21}\beta - a^1_{31}\alpha}{a^1_{31}}\omega^1,\ \overline{\Omega}^2_1 = \frac{a^2_{32}}{a^1_{31}}\omega^2,\ \overline{\Omega}^1_3 = \Big(b_{111} - \frac{\beta b_{11}}{a^1_{31}}\Big)\omega^1,$$

$$\overline{\Omega}^3_1 = \frac{b_{33}}{a^1_{31}}\omega^3,\ \overline{\Omega}^2_3 = \Big(\frac{b_{11}a^2_{32}}{a^1_{31}} - b_{22}\Big)\omega^2,\ \overline{\Omega}^3_2 = b_{22}\omega^2 - \frac{a^1_{21}b_{33}}{a^1_{31}}\omega^3$$

и $\overline{\Omega}^4_1 = a^1_{31}\omega^1,\ \overline{\Omega}^4_2 = 0,\ \overline{\Omega}^4_3 = 0.$

Из полученных равенств устанавливаем, что первое семейство линий сети $\Sigma_3(F^1_3)$ – геодезическое на гиперповерхности (F^1_3), второе – асимптотическое, третье является семейством прямолинейных образующих. Гиперповерхность (F^1_3) – тангенциально вырожденная поверхность ранга 1. Каждое из 1-направлений, принадлежащих 2-распределению $\overline{\theta}_2 = \overline{\theta}_2(\vec g_2, \vec g_3)$, является направлением кривизны относительно нормали $[F^1_3, \vec g_4]$ гиперповерхности (F^1_3). Асимптотическое семейство линий сети $\Sigma_3(F^1_3)$ – плоское, каждая линия этого семейства принадлежит 2-плоскости $[F^1_3, \vec g_2, \vec g_3]$. Вдоль геодезического семейства линий сети $\Sigma_3(F^1_3)$ гиперповерхность (F^1_3) расслаивается на однопараметрическое семейство плоских двумерных образующих $[F^1_3, \vec g_2, \vec g_3]$. Вдоль асимптотического семейства линий сети $\Sigma_3(F^1_3)$ гиперповерхность (F^1_3) расслаивается на однопараметрическое семейство двумерных развертывающихся поверхностей коразмерности 1. Сеть $\Sigma_3(F^1_3) \subset (F^1_3)$ не может быть ортогональной и имеет на касательных к своим линиям 6 фокусов.

7. Отнесем гиперповерхность (F^2_3) к подвижному реперу $\mathcal{R}''' = \{F^2_3, \vec\tau_i, \vec\tau_4\}$, где $\vec\tau_4 = \vec e_2$ – орт нормали гиперповерхности (F^2_3). При инфинитезимальном перемещении точки F^2_3 вдоль гиперповерхности (F^2_3) получаем:

$$d\vec F^2_3 = \overset{*}{\omega}{}^i \vec\tau_i,\ d\vec\tau_i = \widetilde{\Omega}^j_i \vec\tau_j + \widetilde{\Omega}^4_i \vec\tau_4,\ d\vec\tau_4 = \widetilde{\Omega}^i_4 \vec\tau_i + \widetilde{\Omega}^4_4 \vec\tau_4.$$

Векторы $\vec\tau_i$ касаются линий сети $\Sigma_3(F^2_3) \subset (F^2_3)$, поэтому формы $\widetilde{\Omega}^j_i\ (i \neq j)$ – главные. Результаты соответствующих вычислений имеют вид:

$$\widetilde{\Omega}^1_2 = a^1_{31}\omega^1,\ \widetilde{\Omega}^2_1 = -\Big(a^1_{31} + \frac{b_{11}b_{22}}{a^2_{32}}\Big)\omega^1,\ \widetilde{\Omega}^1_3 = (b_{22}a^1_{31} - b_{11}a^2_{32})\omega^1,$$

$$\widetilde{\Omega}^3_1 = \frac{b_{11}}{a^2_{32}}\omega^1,\ \widetilde{\Omega}^2_3 = \Big(b_{222} - \frac{\gamma b_{22}}{a^2_{32}}\Big)\omega^2,\ \widetilde{\Omega}^3_2 = \frac{b_{33}}{a^2_{32}}\omega^3$$

и $\widetilde{\Omega}^4_1 = -a^1_{21}\,\omega^1,\ \widetilde{\Omega}^4_2 = a^2_{32}\,\omega^2,\ \widetilde{\Omega}^4_3 = 0.$

Первое семейство линий сети $\Sigma_3(F^2_3)$ ортогонально к остальным семействам линий этой сети. Второе семейство линий – геодезическое на гиперповерхности (F^2_3), третье семейство является семейством прямолинейных образующих гиперповерхности (F^2_3). Гиперповерхность (F^2_3) – тангенциально вырожденная поверхность ранга 2. В направлении поля $\vec{\tau}_1$ она расслаивается на однопараметрическое семейство подповерхностей коразмерности 1. Первое и третье семейства линий сети $\Sigma_3(F^2_3)$ являются семействами линий кривизны относительно нормали $[F^2_3, \vec{\tau}_4]$. Сеть $\Sigma_3(F^2_3)$ имеет на касательных к своим линиям 6 фокусов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. – Лит. мат. сб., 1966, 6, № 4, с.475–491.

2. Смирнов Р.В. Преобразования Лапласа р-сопряженных систем. – ДАН СССР, 1950, 71, № 3, с.437–439.

3. Т и х о н о в В.А. Ступенчато-чебышевские сети на многомерных поверхностях аффинного пространства. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1976, вып. 7, с.119–129.

4. Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана. М., Гостехиздат, 1948.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 12 1981

В.А. Т р у п п о в

ОБ ИНВАРИАНТАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Строятся объекты, связанные с дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка, инвариантные относительно преобразований линейной группы.

Рассмотрим пространство

$$V_m = R^1 \times V_n \times V^*_n \times S^2(V^*_n),\quad m = \frac{n^2+5n+2}{2},$$

где V_n – векторное пространство, V^*_n – пространство линейных форм на V_n, а $S^2(V^*_n)$ – пространство ковариантных симметрических тензоров. Если $W=(e, e_i, e^i, e^i \otimes e^j)$ – базис пространства V_m, а (u, x^i, u_i, u_{ij}) – координаты точки $x \in V_m$ в этом базисе, то координаты $(\bar{u}, \bar{x}^i, \bar{u}_i, \bar{u}_{ij})$ этой же точки в базисе $W'=(e', e'_i, e'^i, e'^i \otimes e'^j)$, где

$$e' = e,\ e'_i = \overset{*}{g}{}^j_i e_j,\ e'^i = g^i_j e^j,\ e'^i \otimes e'^j = g^i_k g^j_m e^k \otimes e^m, \qquad (1)$$

g^i_j, $\overset{*}{g}{}^i_j$, – координаты $g, g^* \in GL(n)$, $g \cdot \overset{*}{g} = e$ связаны формулами

$$\bar{u} = u,\ \bar{x}^i = g^i_j x^j,\ \bar{u}_j = \overset{*}{g}{}^i_j u_i,\ \bar{u}_{ij} = \overset{*}{g}{}^k_i \overset{*}{g}{}^m_j u_{km}. \qquad (2)$$

Легко видеть, что закон преобразования величин (u, u_i, u_{ij}) совпадает с законом преобразования координат струй [1] C^τ $(\tau>2)$ отображения $f: V_n \to R^1$.

Дифференцируя (2) по всем переменным, входящим в эту систему, получаем дифференциальную форму закона преобразования координат точки: $x \in V_m$.

$$dx^i + \omega^i_j x^j = \overset{*}{g}{}^i_j d\bar{x}^j,\quad du_i - u_j \omega^j_i = d\bar{u}_j g^j_i,$$